Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 1

Viernes 6 de mayo de 2022 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2222 – 7221

25 páginas

Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 6]

Un grupo de 130 candidatos solicitaron entrar en el programa de Artes o en el programa de Ciencias de una universidad. En la siguiente tabla se muestran los resultados de estas solicitudes.

	Aceptados	**Rechazados**
Programa de Artes	17	24
Programa de Ciencias	25	64

(a) Halle la probabilidad de que un candidato de este grupo, elegido al azar, haya sido aceptado por la universidad. [1]

Se escoge al azar a un candidato perteneciente a este grupo. Vemos que lo han aceptado en el programa que había elegido.

(b) Halle la probabilidad de que este candidato solicitara entrar en el programa de Artes. [2]

Se escogen al azar dos candidatos distintos pertenecientes al grupo original.

(c) Halle la probabilidad de que ambos candidatos solicitaran entrar en el programa de Artes. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

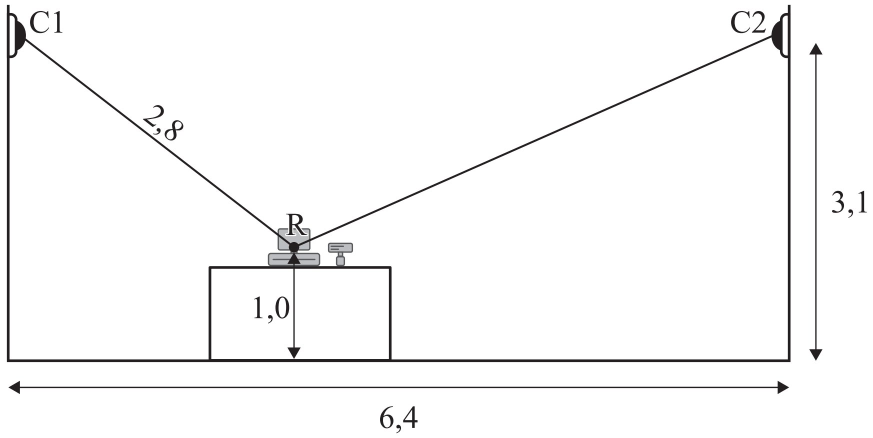
(Pregunta 1: continuación)

2. [Puntuación máxima: 8]

El propietario de una tienda de ultramarinos instala dos cámaras de seguridad, que están representadas por los puntos C1 y C2. Las dos cámaras apuntan al centro de la caja registradora de la tienda, que está representado por el punto R.

La siguiente figura, que corresponde a un corte transversal de la tienda, muestra toda esta información.

la figura no está dibujada a escala



Las cámaras están situadas a una altura de $3,1\,\text{m}$ y la distancia horizontal que hay entre las cámaras es de $6,4\,\text{m}$. La caja registradora está colocada sobre un mostrador, de modo tal que su centro R está a $1,0\,\text{m}$ del suelo.

Entre la Cámara 1 y el centro de la caja registradora hay una distancia de $2,8\,\text{m}$.

(a) Determine el ángulo de depresión que hay desde la Cámara 1 al centro de la caja registradora. Dé la respuesta en grados. [2]

(b) Calcule la distancia que hay desde la Cámara 2 al centro de la caja registradora. [4]

(c) Sin hacer ningún cálculo más, determine cuál de las dos cámaras tiene el mayor ángulo de depresión al centro de la caja registradora. Justifique su respuesta. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

3. [Puntuación máxima: 7]

La prueba del polígrafo se utiliza para determinar si la gente está diciendo la verdad o no, pero no es completamente precisa. Cuando una persona dice la verdad, tiene un 20% de probabilidades de **no** pasar la prueba. Cada resultado de la prueba es independiente de todos los resultados anteriores.

Hay 10 personas que se someten a la prueba del polígrafo y las 10 dicen la verdad.

(a) Calcule el número esperado de personas que pasarán esta prueba del polígrafo. [2]

(b) Calcule la probabilidad de que haya exactamente 4 personas que **no** pasen esta prueba del polígrafo. [2]

(c) Determine la probabilidad de que haya menos de 7 personas que pasen esta prueba del polígrafo. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

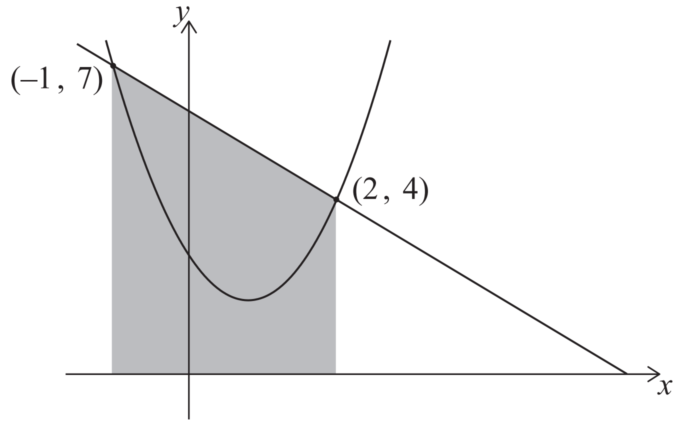
4. [Puntuación máxima: 7]

Los gráficos de $y = 6 - x$ e $y = 1{,}5x^2 - 2{,}5x + 3$ se cortan en $(2\,,\ 4)$ y en $(-1\,,\ 7)$, tal y como se muestra en las siguientes figuras.

En la **figura 1**, se ha sombreado la región que está delimitada por las rectas $y = 6 - x$, $x = -1$, $x = 2$ y el eje x.

la figura no está dibujada a escala

Figura 1

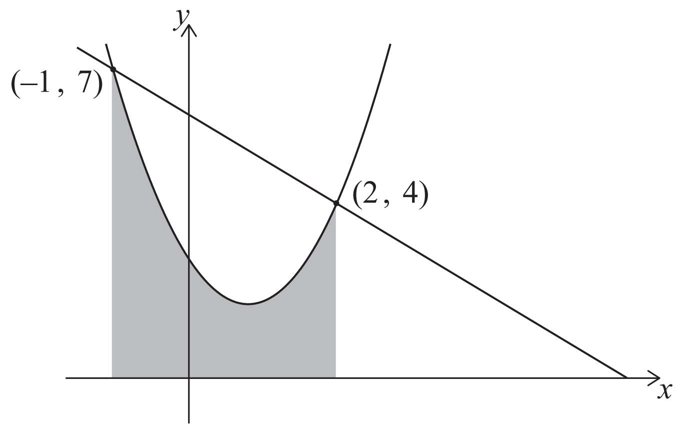


(a) Calcule el área de la región sombreada de la **figura 1**. [2]

En la **figura 2**, se ha sombreado la región que está delimitada por la curva $y = 1{,}5x^2 - 2{,}5x + 3$, las rectas $x = -1$, $x = 2$ y el eje x.

la figura no está dibujada a escala

Figura 2



(b) (i) Escriba una integral para el área de la región sombreada de la **figura 2**.

(ii) Calcule el área de esta región. [3]

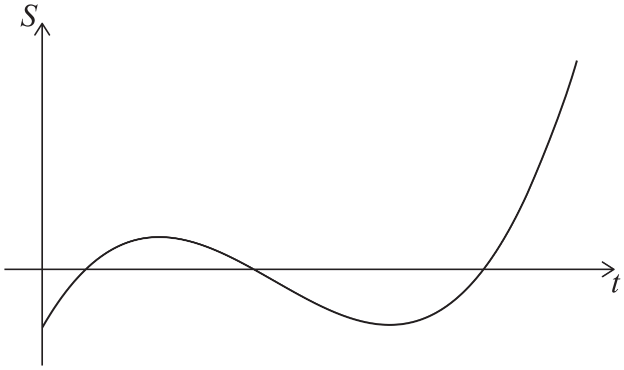
(c) A partir de lo anterior, determine el área que está delimitada por $y = 6 - x$ e $y = 1{,}5x^2 - 2{,}5x + 3$. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

5. [Puntuación máxima: 8]

El siguiente gráfico muestra el promedio de los ahorros (S miles de dólares) que tienen un grupo de graduados universitarios en función de t, que es el número de años transcurridos desde que acabaron la universidad.



(a) Escriba una característica de este gráfico que sugiera que podría resultar apropiado usar una función cúbica para modelizar esta situación. [1]

La ecuación del modelo se puede expresar de la forma $S = at^3 + bt^2 + ct + d$, donde a, b, c y d son constantes reales.

El gráfico del modelo tiene que pasar obligatoriamente por los siguientes cuatro puntos.

t	0	1	2	3
S	−5	3	−1	−5

(b) (i) Escriba el valor de d.

(ii) Escriba un sistema de tres ecuaciones con las incógnitas a, b y c.

(iii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle los valores de a, b y c. [4]

Un valor negativo de S representa una situación en la que cabe esperar que un graduado esté endeudado.

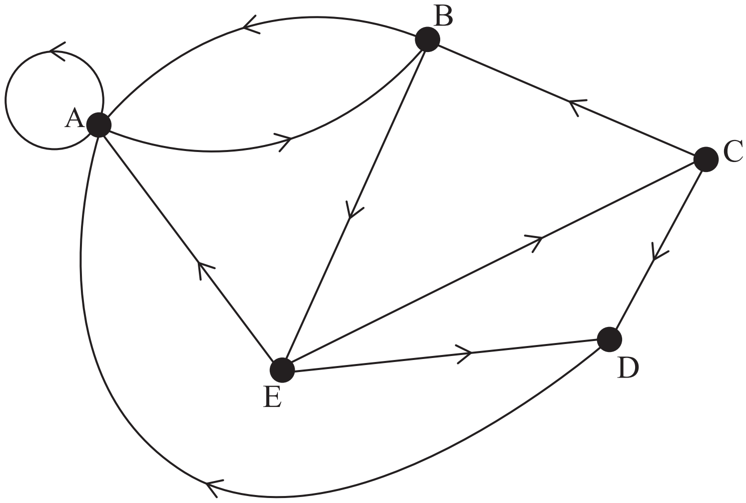
(c) Utilice el modelo para determinar el tiempo total (en años) durante el que cabe esperar que un graduado esté endeudado después de haber acabado la universidad. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 5: continuación)

6. [Puntuación máxima: 5]

Considere la siguiente red orientada.



(a) Escriba la matriz de adyacencia para esta red. [2]

(b) Determine el número de recorridos distintos de longitud 5 que empiezan y terminan en el mismo vértice. [3]

7. [Puntuación máxima: 5]

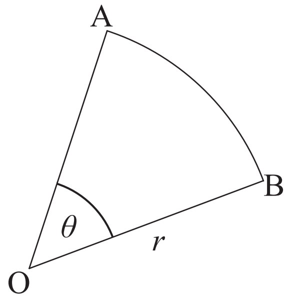
La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 9.

El primer término es 4 unidades mayor que el segundo término.

Halle el tercer término. Justifique su respuesta.

8. [Puntuación máxima: 8]

La figura muestra un sector circular (OAB) de un círculo de centro O y radio r, tal que $\mathrm{A\hat{O}B} = \theta$.



Sam mide el valor de r y obtiene $2\,\mathrm{cm}$; también mide el valor de θ y obtiene 30°.

(a) Utilice las mediciones de Sam para calcular el área del sector circular. Dé la respuesta redondeando a cuatro cifras significativas. [2]

Se descubre que las mediciones que hizo Sam tienen una precisión de una sola cifra significativa.

(b) Halle el límite superior y el límite inferior del área del sector circular. [3]

(c) Halle, dando una justificación, el mayor porcentaje de error que se puede cometer al decir que el área del sector circular es igual a la respuesta dada en el apartado (a). [3]

9. [Puntuación máxima: 8]

Un psicólogo anota el número de dígitos (d) de π que son capaces de recordar una muestra de alumnos de Matemáticas del Nivel Superior del IB.

d	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	2	6	24	21	11	3

(a) Halle un estimador sin sesgo para la media de d de la población. [1]

(b) Halle un estimador sin sesgo para la varianza de d de la población. [2]

El psicólogo ha leído que, en la población general, la gente puede recordar un promedio de 4,4 dígitos de π. El psicólogo quiere realizar una prueba estadística para ver si los alumnos de Matemáticas del Nivel Superior del IB son capaces de recordar más dígitos que la población general.

(c) $H_0: \mu = 4{,}4$ es la hipótesis nula correspondiente a esta prueba.

(i) Indique la hipótesis alternativa.

(ii) Sabiendo que se cumplen todos los supuestos para esta prueba, realice un contraste de hipótesis adecuado. Indique su conclusión y justifíquela. Utilice un nivel de significación del 5%. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. [Puntuación máxima: 5]

La función $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$ está definida para $x>2$, $x\in\mathbb{R}$.

(a) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$. No es necesario que indique el dominio. [3]

(b) Resuelva $f(x)=f^{-1}(x)$. [2]

11. [Puntuación máxima: 6]

Juliana tiene previsto invertir dinero durante 10 años en una cuenta que paga un interés del $3{,}5\%$ compuesto anualmente. Ella espera que la tasa de inflación anual sea del 2% al año durante todo ese período de 10 años.

A Juliana le gustaría que su inversión alcanzara un valor real de 4000 \$, en relación con el valor actual del dinero, cuando finalice ese período de 10 años. Está barajando dos opciones.

Opción 1: Hacer una única inversión al inicio de ese período de 10 años.

Opción 2: Invertir 1000 \$ al inicio de ese período de 10 años y luego invertir x \$ en esa misma cuenta al final de cada año (incluidos el primer año y el último).

(a) Para la opción 1, determine la cantidad mínima que Juliana tendría que invertir. Dé la respuesta redondeando al número entero de dólares más próximo. [3]

(b) Para la opción 2, halle el valor mínimo de x que Juliana necesitaría invertir cada año. Dé la respuesta redondeando al número entero de dólares más próximo. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

12. [Puntuación máxima: 6]

El sexo de las sepias es difícil de determinar visualmente, por lo que se suele averiguar pesando la sepia.

Se sabe que los pesos de las sepias macho adultas siguen una distribución normal de media $10\,\text{kg}$ y desviación típica igual a $0{,}5\,\text{kg}$.

Se sabe que los pesos de las sepias hembra adultas siguen una distribución normal de media $12\,\text{kg}$ y desviación típica igual a $1\,\text{kg}$.

Un zoólogo utiliza la hipótesis nula de que, en ausencia de datos, una sepia es macho.

Si se obtiene un peso por encima de $11{,}5\,\text{kg}$, la sepia se clasifica como hembra.

(a) Halle la probabilidad de cometer un error de tipo I al pesar una sepia macho. [2]

(b) Halle la probabilidad de cometer un error de tipo II al pesar una sepia hembra. [2]

El $90\,\%$ de las sepias adultas son machos.

(c) Halle la probabilidad de cometer un error al utilizar el método del zoólogo. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

13. [Puntuación máxima: 5]

Un circuito eléctrico tiene dos fuentes de alimentación. El voltaje (V_1) que proporciona la primera fuente en el instante t se puede modelizar así:

$$V_1 = \mathrm{Re}(2\mathrm{e}^{3t\mathrm{i}}).$$

El voltaje (V_2) que proporciona la segunda fuente se puede modelizar así:

$$V_2 = \mathrm{Re}(5\mathrm{e}^{(3t+4)\mathrm{i}}).$$

El voltaje total del circuito (V_T) viene dado por

$$V_T = V_1 + V_2.$$

(a) Halle una expresión para V_T que sea de la forma $A\cos(Bt + C)$, donde A, B y C son constantes reales. [4]

(b) A partir de lo anterior, escriba el voltaje máximo del circuito. [1]

14. [Puntuación máxima: 4]

Se genera la forma de un jarrón rotando una curva alrededor del eje y.

El jarrón tiene una altura de $10\,\text{cm}$. El radio interno del jarrón se va midiendo a lo largo de la altura, a intervalos de $2\,\text{cm}$:

Altura (cm)	**Radio (cm)**
0	4
2	6
4	8
6	7
8	3
10	5

Utilice la regla del trapecio para estimar el volumen de agua que cabe en el jarrón.

15. [Puntuación máxima: 7]

La ecuación de la recta $y = mx + c$ se puede expresar en forma vectorial: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

(a) Halle los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en función de m y/o c. [2]

La matriz $\boldsymbol{M}$ es $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Halle el valor de $\det \boldsymbol{M}$. [1]

La recta $y = mx + c$ (donde $m \neq -2$) se transforma en una nueva recta utilizando la transformación que describe la matriz $\boldsymbol{M}$.

(c) Muestre que la ecuación de la recta resultante no depende de m ni de c. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

16. [Puntuación máxima: 7]

El vector de posición de una partícula P respecto a un origen fijo O en el instante t viene dado por

$$\vec{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}.$$

(a) Halle el vector velocidad de P. [2]

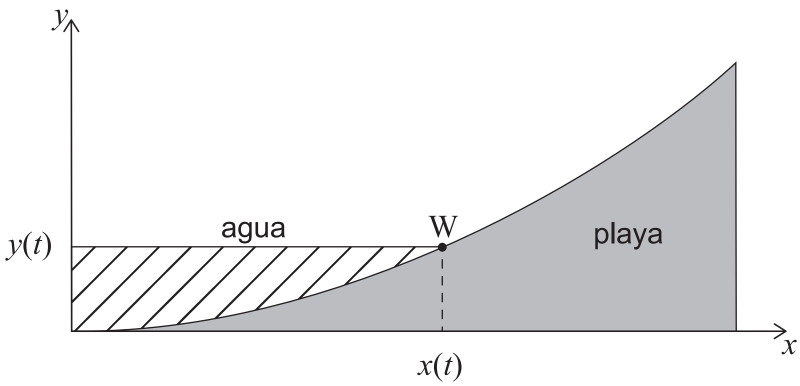
(b) Muestre que el vector aceleración de P no es nunca paralelo al vector de posición de P. [5]

. . . .

17. [Puntuación máxima: 8]

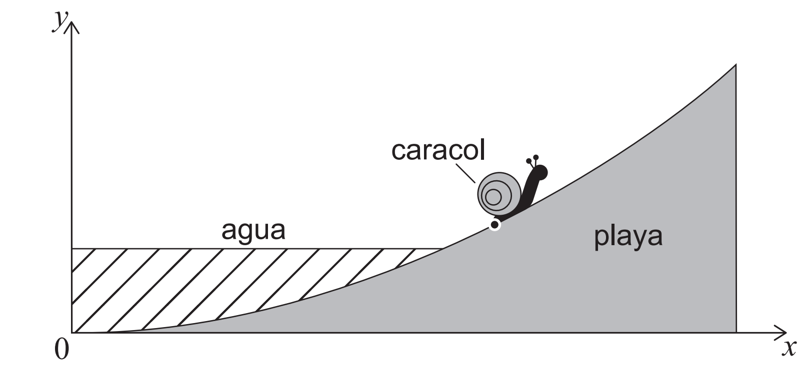
El corte transversal de una playa se puede modelizar mediante la ecuación $y = 0{,}02x^2$ para $0 \le x \le 10$, donde y es la altura de la playa (en metros) a una distancia horizontal de x metros del origen y t es el tiempo (en horas) que ha transcurrido desde la última marea baja.

En el instante $t = 0$ el agua está en el punto $(0,\ 0)$. La altura del agua va subiendo a un ritmo de $0{,}2$ metros por hora. El punto $\mathrm{W}(x(t),\ y(t))$ indica el lugar de la playa al que llega el nivel del agua en el instante t.



(a) Halle la componente horizontal de la velocidad de W cuando la coordenada x de W es igual a 1. [3]

Se modeliza un caracol como un único punto. En el instante $t = 0$ se encuentra en $(1\,;\ 0{,}02)$. El caracol se aleja del agua ascendente a una velocidad de 1 metro por hora, siguiendo la curva del corte transversal de la playa. La siguiente figura muestra esta información para un valor de t tal que $t > 0$.



(b) (i) Halle el tiempo que tarda el caracol en llegar al punto $(10,\ 2)$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que el caracol llega al punto $(10,\ 2)$ antes de que lo haga el agua. [5]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 17: continuación)

Referencias:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.